MỘT SỐ TÍNH CHẤT ĐẶC TRƯNG CỦA HÀM LỒI XẤP XỈ

Phùng Xuân Lễ
Trường Đại học Phú Yên
Email: phungxuanle@gmail.com
Ngày nhận bài: 02/05/2024; Ngày nhận đăng: 03/06/2024

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số kết quả của hàm lồi xấp xỉ định nghĩa trên không gian Banach X*. Các kết quả này đã được đưa ra bởi các tác giả Huỳnh Văn Ngãi, Nguyễn Hữu Trọn và Michel Théra. Tuy nhiên, hầu hết chứng minh vắn tắt hoặc không chứng minh. Ở đây, chúng tôi trình bày với chứng minh chặt chẽ và chi tiết.*

Từ khóa: *Hàm lồi xấp xỉ, hàm* $\varepsilon-$ *lồi, hàm* $\varepsilon-$ *liên hợp.*

Some characteristic properties of the convex approximate function

Phung Xuan Le
Phu Yen University
Received: May 02, 2024; Accepted: June 03, 2024

Abstract

In this article, we present some results of approximate convex functions defined on Banach X space. These results were given by Huynh Van Ngai, Nguyen Huu Tron and Michel Théra. However, most of them were not proved in full detail. In here, we present them in more detail with proof.

Keywords: *Approximate convex function,* $\varepsilon-$ *convex function,* $\varepsilon-$ *conjugate function.*

1. Đặt vấn đề

Lớp các hàm lồi đóng một vai trò quan trọng trong Toán học và các ngành khoa học ứng dụng. Suốt thập kỷ qua, nhiều kết quả được mở rộng dựa vào tính lồi. Tuy nhiên, tính lồi thường là những giả thiết quá mạnh trong việc ứng dụng, chẳng hạn như trong Toán kinh tế. Nhiều vấn đề trong thực tiễn, ta phải làm việc với những đối tượng nói chung không lồi theo nghĩa chính thống. Vì vậy, việc khảo sát những đối tượng (tập hợp, hàm) không lồi nhưng vẫn giữ được một số tính chất đẹp của tính lồi là có ý nghĩa quan trọng. Những đối tượng như thế được gọi là lồi tổng quát.

Gần đây, người ta quan tâm nhiều đến các lớp hàm lồi tổng quát như lớp các hàm *dưới*$-C^1$, *dưới*$-C^2$; *hàm nửa trơn*; *hàm lồi xấp xỉ*. Trong bài báo này chỉ khảo sát, nghiên cứu một số tính chất đặt trưng của *hàm lồi xấp xỉ*.

2. Các khái niệm và định lý

Một số khái niệm liên quan đến trong phần này mà không nhắc đến trong bài báo, có thể tìm thấy trong (Aubin & Frankowska, 1990; Yên, 2007; Tuy, 1997).

2.1. Một số khái niệm về hàm lồi và hàm $\varepsilon-$lồi.

Phần này trình bày một số khái niệm sẽ được dùng ở phần sau.

Định nghĩa 2.1.1 (Aubin & Frankowska, 1990). Hàm f được gọi là hàm lồi nếu thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y), \text{ với mọi } x,\ y\in X,\ \lambda\in[0,1].$$

Định nghĩa 2.1.2 (Aubin & Frankowska, 1990). Giả sử X là không gian Banach. Hàm $f: X\to\mathbb{R}$ được gọi là Lipschitz địa phương tại $\overline{x}\in X$, nếu tồn tại lân cận U của $\overline{x}\in X$, số $K>0$ sao cho

$$\left|f(x)-f(x')\right|\leq K\|x-x'\|, \text{ với mọi } x,\ x'\in U.$$

Định nghĩa 2.1.3 (Aubin & Frankowska, 1990). Hàm f được gọi là *nửa liên tục dưới* tại $\overline{x}\in X$, nếu với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại lân cận U của $\overline{x}$ sao cho

$$f(\overline{x})-\varepsilon\leq f(y), \text{ với mọi } y\in U.$$

Định nghĩa 2.1.4 (Hoang Tuy, 1997). Hàm f được gọi là hàm $\varepsilon-$*lồi* nếu thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\varepsilon\lambda(1-\lambda)\|x-y\|,\ x,\ y\in X,\ \lambda\in(0,1).$$

Ví dụ. Hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x)=-|x|$ là hàm $2-$*lồi.*

Định nghĩa 2.1.5 (Hoang Tuy, 1997). Cho f là hàm $\varepsilon-$*lồi,* $y\in X$ cố định. Hàm $\varepsilon-$*liên hợp* $f_y^*(\varepsilon,\ .): X^*\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ của f tại y được định nghĩa bởi

$$f_y^*(\varepsilon,\ \xi):\ =\sup_{x\in X}\left\{\langle\xi,x\rangle-f(x)-\varepsilon\|x-y\|\right\}.$$

2.2. Một số khái niệm về hàm lồi xấp xỉ

Phần này, tôi trình bày một số khái niệm cơ bản của *hàm lồi xấp xỉ* trên không gian Banach.

Cho $f: X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ là hàm nửa liên tục dưới. Với mỗi $\delta>0$, ta định nghĩa hàm f_δ như sau

$$f_\delta(x)=\begin{cases} f(x), & x\in B(x_0,\ \delta)\\ \infty, & x\notin B(x_0,\ \delta).\end{cases}$$

Định nghĩa 2.2.1. Hàm f gọi là lồi xấp xỉ tại $x_0\in X$ nếu với mỗi $\varepsilon>0$, tồn tại $\delta>0$ sao cho f_δ là hàm $\varepsilon-$lồi, tức là với mỗi $\varepsilon>0$, tồn tại $\delta>0$ sao cho

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\varepsilon\lambda(1-\lambda)\|x-y\|,\ x,\ y\in B(x_0,\delta),\ \lambda\in(0,1).$$

Hàm f lồi xấp xỉ trên một tập khác rỗng $C\subseteq X$ nếu f là hàm lồi xấp xỉ tại mọi $x\in C$. Khi $C=X$ ta nói f là hàm lồi xấp xỉ.

Nhận xét 2.2.2. Từ định nghĩa ta thấy, một hàm lồi là lồi xấp xỉ điều ngược lại nói chung không đúng. Chẳng hạn, lấy hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x)=-x^2$. Khi đó, f là hàm lồi xấp xỉ nhưng không là hàm lồi. Thật vậy, $\forall\varepsilon>0$, chọn $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$. Khi đó, với mọi

$\lambda \in (0,1),\ x,\ y \in \mathbb{R},\ |x| < \delta,\ |y| < \delta,$ ta có

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) = -\left[\lambda x + (1-\lambda)y\right]^2 = -\lambda^2 x^2 - (1-\lambda)^2 y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy,$$

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) = -\lambda^2 x^2 - (1-\lambda)^2 y^2.$$

Do đó

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) - \lambda f(x) - (1-\lambda) f(y) - \varepsilon\lambda(1-\lambda)|x-y| =$$
$$= -\lambda^2 x^2 + \lambda x^2 - (1-\lambda)^2 y^2 + (1-\lambda)y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy - \varepsilon\lambda(1-\lambda)|x-y|$$
$$= \lambda(1-\lambda)x^2 + \lambda(1-\lambda)y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy - \varepsilon\lambda(1-\lambda)|x-y|$$
$$= \lambda(1-\lambda)\left[(x-y)^2 - \varepsilon|x-y|\right] \le 0,\ \forall |x|,\ |y| < \delta.$$

Điều này chứng tỏ f là hàm lồi xấp xỉ. Nhưng f không là hàm lồi, vì với mọi $\lambda \in (0,1)$, với mọi $x \neq y$, ta có $\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 > 0$ nên

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \forall \lambda \in (0,1), \text{ với mọi } x \neq y.$$

2.3. Một số tính chất đặt trưng của hàm lồi xấp xỉ

Phần này, tôi trình bày một số tính chất cơ bản nhất có thể gọi là đẹp *của hàm lồi xấp xỉ* trên không gian Banach.

Định nghĩa 2.3.1 (Aubin & Frankowska, 1990; Yên, 2007). Dưới vi phân của hàm f tại $\overline{x}$, ký hiệu $\partial f(\overline{x})$, được định nghĩa như sau

$$\partial f(\overline{x}) = \left\{x^* \in X^* : f(x) - f(\overline{x}) \ge \langle x^*, x - \overline{x}\rangle, \forall x \in X\right\}.$$

Định nghĩa 2.3.2 (Yên, 2007). Dưới vi phân Clarke của hàm f tại $x \in domf$, ký hiệu $\partial^C f(x)$, được định nghĩa như sau

$$\partial^C f(x) = \left\{x^* \in X^* : \langle x^*, v\rangle \le f^{\uparrow}(x, v), \forall v \in X\right\}.$$

Định nghĩa 2.3.3 (Yên, 2007). Dưới vi phân Fréchet của hàm f tại $x \in domf$, ký hiệu $\partial^F f(x)$, được định nghĩa như sau

$$\partial^F f(x) = \left\{x^* \in X^* : \liminf_{\|h\| \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle x^*, h\rangle}{h} \ge 0\right\}.$$

Định nghĩa 2.3.4 (Yên, 2007). $\varepsilon-$dưới vi phân của hàm f tại $x \in domf$, ký hiệu $\partial_\varepsilon^F f(x)$, được định nghĩa như sau

$$\partial_\varepsilon^F f(x) = \left\{x^* \in X^* : \liminf_{\|h\| \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle x^*, h\rangle}{h} \ge -\varepsilon\right\}.$$

Định nghĩa 2.3.5 (Yên, 2007). Dưới vi phân Mordu Khovich của hàm f tại $x \in domf$, ký hiệu $\partial^M f(x)$, được định nghĩa như sau

$$\partial^M f(x) = seq - \limsup_{y\to x, \varepsilon\downarrow 0} \partial_\varepsilon^F f(y).$$

trong đó, "$seq - \limsup$" ký hiệu giới hạn trên Pailevé-Kuratowski của một tập, tức là

$$seq - \limsup_{y\to x} \partial_\varepsilon^F f(y) = \left\{x^* \in X^* : \exists x_n \to x, x_n^* \to x^*, x_n^* \in \partial_\varepsilon^F f(x_n)\right\}.$$

Định lý 2.3.6 (Ngai, Tron, & Thera, 2000). *Giả sử $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ là hàm nửa liên tục dưới, chính thường. Nếu f là hàm lồi xấp xỉ tại $x_0 \in Int(domf)$ thì f Lipschitz địa phương tại x_0.*

Chứng minh. Vì *f là hàm* lồi xấp xỉ tại x_0 nên tồn tại $\varepsilon > 0$ và $\delta > 0$ sao cho $B(x_0, \delta) \subset domf$ và

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) + \varepsilon\lambda(1-\lambda)\|x-y\|, \forall x, y \in B(x_0,\delta), \lambda \in (0,1) \quad (1)$$

Trước hết ta chứng tỏ f bị chặn địa phương tại x_0. Lấy $U_n := \{x \in B(x_0,\delta) / f(x) \le n, n = 1,2...\}$. Khi đó, $B(x_0,\delta) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ và U_n đóng $\forall n$. Thật vậy, hiển nhiên $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subset B(x_0,\delta)$, vì $B(x_0,\delta) \subset domf$ nên ta có bao hàm thức ngược lại. Cố định n, lấy dãy $\{u_m\} \subset U_n, u_m \to u_0$. Ta chứng tỏ $u_0 \in U_n$. Vì $u_m \in B(x_0,\delta)$ nên $\|u_m - x_0\| < \delta, \forall m$. Do đó $\|u_0 - x_0\| < \delta$, với m đủ lớn. Vì f là hàm nửa liên tục dưới nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $U -$ lân cận của u_0 sao cho

$$f(u_0) \le f(y) + \varepsilon, \forall y \in U.$$

Do $u_m \to u_0$ nên với m đủ lớn ta có

$$f(u_0) \le f(u_m) + \varepsilon \le n + \varepsilon.$$

Cho $\varepsilon \to 0$ ta được $f(u_0) \le n,$ với m đủ lớn. Điều này chứng tỏ $u_0 \in U_n$. Vậy U_n đóng $\forall n$.

Theo Định lý Baire, $\exists n_0 : IntU_{n_0} \ne \varnothing.$ Giả sử $z_0 \in IntU_{n_0}$, do đó $\exists 0 < \delta_1$ sao cho $B(x_0,\delta_1) \subset U_{n_0}$. Chọn $\alpha > 1$ sao cho $y_0 := \frac{\alpha}{\alpha-1} x_0 - \frac{1}{\alpha-1} z_0 \in B(x_0,\delta)$ và chọn $\gamma = \frac{\delta_1}{\alpha} < \delta.$ Khi đó, $\forall x \in B(x_0,\gamma), z := y_0 + \alpha(x - y_0) \in IntU_{n_0}$. Thật vậy, $\|z - z_0\| = \|y_0 - z_0 + \alpha(x - y_0)\| = \|\alpha(y_0 - x_0) + \alpha(x - y_0)\| = \alpha\|x - x_0\| < \alpha\gamma = \delta_1,$ tức là $z \in B(z_0,\delta_1) \subset U_{n_0}$. Vì $z, y_0 \in B(x_0,\delta)$ nên theo (1) ta có

$$f(x) = f\left(\alpha^{-1} z + \left(1 - \alpha^{-1}\right) y_0\right)$$

$$\le \alpha^{-1} f(z) + (1-\alpha^{-1}) f(y_0) + \varepsilon\alpha^{-1}(1-\alpha^{-1})\|y-z\|$$
$$\le \alpha^{-1} n_0 + (1-\alpha^{-1}) f(y_0) + \varepsilon\alpha^{-1}(1-\alpha^{-1}) 2\delta.$$

Như vậy, f bị chặn trên $B(x_0,\gamma)$, do đó tồn tại $M>0$ sao cho $|f(x)| \le M$, $\forall x \in B(x_0,\gamma)$. Với mọi $x \in B(x_0,\gamma)$, $2x_0 - x \in B(x_0,\gamma)$ nên ta có

$$f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(2x_0 - x)\right)$$
$$\le \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(2x_0 - x) + \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|$$
$$\le \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} M + \frac{\varepsilon}{2}\gamma. \quad (2)$$

Suy ra $f(x) \ge 2f(x_0) - M - 2\varepsilon\gamma, \forall x \in B(x_0,\gamma)$. Với $x, y \in B\left(x_0, \frac{\gamma}{2}\right)$ thì

$z := x + \left(\frac{\gamma}{2\eta}(x-y) \in B(x_0,\gamma)\right) \in B(x_0,\gamma)$, $\eta = \|x-y\|$. Khi đó,

$$f(x) = f\left(\frac{2\eta}{\gamma+2\eta} z + \frac{\gamma}{\gamma+2\eta} y\right) \le \frac{2\eta}{\gamma+2\eta} f(z) + \frac{\gamma}{\gamma+2\eta} f(y) + \frac{2\varepsilon\eta\gamma}{(\gamma+2\eta)^2}\|z-y\|.$$

Vì $|f(x)| \le M, \forall x \in B(x_0,\gamma)$ nên $f(x) - f(y) \le \frac{2\eta}{\gamma+2\eta}\big(f(z) - f(y)\big) + \varepsilon\gamma\|x-y\|$

$$\le \frac{2\eta}{\gamma}\big(f(z) - f(y)\big) + \varepsilon\lambda\|x-y\| \le \left(\frac{4M}{\gamma} + \varepsilon\gamma\right)\|x-y\|. \quad (3)$$

Đổi vai trò x và y ta được

$$f(y) - f(x) \le \left(\frac{4M}{\gamma} + \varepsilon\gamma\right)\|x-y\|.$$

Do đó

$$|f(y) - f(x)| \le \left(\frac{4M}{\gamma} + \varepsilon\gamma\right)\|x-y\|.$$

Vậy f là hàm Lipschizt địa phương tại x_0. □

Định lý 2.3.7 (Ngai, Tron, & Thera, 2000; Yên, 2007). *Nếu* $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *là hàm nửa liên tục dưới, lồi xấp xỉ tại* $x_0 \in domf$ *thì mọi* $v \in X$, *đạo hàm theo phương của f*

$$f'(x_0, v) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

tồn tại và tuyến tính dưới trên X.

Chứng minh. Vì f lồi xấp xỉ tại x_0, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ và một hàm lồi nửa liên tục dưới $g_{x_0}(.)$ sao cho

$$\left|f(x)-g_{x_0}(x)\right|\le\varepsilon\|x-x_0\|,\forall x\in B(x_0,\delta)$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\varepsilon\|x-x_0\|\le g_{x_0}(x)\le f(x)+\varepsilon\|x-x_0\|.$$

Chú ý, $g_{x_0}(x)=f(x_0)$, cố định $v\in X$ và lấy $t>0$ đủ nhỏ để $t\|v\|<\delta$. Khi đó,

$$\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}-\varepsilon\|v\|\le\frac{g_{x_0}(x_0+tv)-g_{x_0}(x_0)}{t}\le\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}+\varepsilon\|v\|$$

Vì $g_{x_0}(x)$ là hàm lồi nên ta có $g'_{x_0}(x_0,v)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{g_{x_0}(x_0+tv)-g_{x_0}(x_0)}{t}$

Cho $t\to0$ ta được $\limsup\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}\le g_{x_0}(x_0,v)+\varepsilon\|v\|$

và

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}\le g'_{x_0}(x_0,v)-\varepsilon\|v\|.$$

Từ đó, ta có

$$\limsup_{t\to0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}\le\liminf_{t\to0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}+\varepsilon\|v\|,\forall\varepsilon>0.$$

Vậy

$$\limsup_{t\to0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}=\liminf_{t\to0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t},\text{ nghĩa là}$$

$$f'(x_0,v)=\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$$

tồn tại.

Định lý 2.3.8 (Ngai, Tron, & Thera, 2000). *Cho* X *là một không gian Banach,* $f:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *là hàm nửa liên tục dưới, lồi xấp xỉ tại* $x_0\in domf$. *Khi đó, ta có*

(i) $\partial^C f(x_0)=\partial^M f(x_0)=\partial^F f(x_0)=\partial f(x_0)$.

(ii) $\partial f(x_0)\subseteq\partial^A f(x_0)$. *Nếu* f *là hàm Lipschitz tại* x_0 *thì* $\partial f(x_0)=\partial^A f(x_0)$.

Chứng minh. Chứng minh (i). Theo định nghĩa, ta có

$$\partial^F f(x_0)\subseteq\partial^C f(x_0),\ \partial^F f(x_0)\subseteq\partial^M f(x_0),\ \partial^F f(x_0)\subseteq\partial f(x_0).$$

Ta cần chứng tỏ rằng $\partial^C f(x_0)\subseteq\partial^F f(x_0)$, $\partial^M f(x_0)\subseteq\partial^F f(x_0)$, $\partial f(x_0)\subseteq\partial^F f(x_0)$.

Vì f là hàm lồi xấp xỉ tại x_0 nên với $\varepsilon>0$ tùy ý, tồn tại $\delta>0$ sao cho

$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\varepsilon\lambda(1-\lambda)\|x-y\|$, $x,\ y\in B(x_0,\delta)$, $\lambda\in(0,1)$.

Lấy $x^*\in\partial^C f(x_0)=\partial^C f_\delta(x_0)\subseteq x^*\in\partial^\varepsilon f_\delta(x_0)$, ta có

$$\langle x^*,h\rangle\le f(x_0+h)-f(x_0)+\varepsilon\|h\|,\ \forall h\in B(0,\delta).$$

Suy ra

$$x^* \in \partial^F f(x_0) \text{ hay } \partial^C f(x_0) \subseteq \partial^F f(x_0).$$

Ta chứng tỏ $\partial^M f(x_0) \subseteq \partial^F f(x_0)$.

Lấy $x^* \in \partial^M f(x_0)$, $\exists \{\varepsilon_n\} \downarrow 0$, $\{x_n\} \to x_0$, $\{x_n^*\} \xrightarrow{\text{w}} x^*$ với $x_n^* \in \partial_{\varepsilon_n}^F f(x_n)$. Chọn các dãy số không âm $\gamma_n \downarrow 0$. Theo định nghĩa, với mỗi n ta tìm một số $\eta_n > 0$ sao cho

$$\langle x_n^*, h \rangle \le f(x_n + h) - f(x_n) + (\varepsilon_n + \gamma_n)\|h\|, \ \forall h \in B(x_n, \eta_n).$$

Giả sử $x_n \in B(x_0, \delta), \forall n \ge n_0$. Với bất kỳ $y \in B(x_0, \delta)$, chọn $t \in (0,\ 1)$ sao cho $h\|y - x_n\| < \eta_n$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned}\langle x_n^*,\ t(y - x_n) \rangle &\le f(x_n + t(y - x_n)) - f(x_n) + (\varepsilon_n + \gamma_n)\|y - x_n\| \\ &\le (1-t) f(x_n) + tf(y) - f(x_n) + t(\varepsilon(1-t) + \varepsilon_n + \gamma_n)\|y - x_n\|.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\langle x_n^*, y - x_n \rangle \le f(y) - f(x_n) + (\varepsilon + \varepsilon_n + \gamma_n)\|y - x_n\|.$$ Cho $n \to \infty$ ta được

$$\langle x^*, y - x_0 \rangle \le f(y) - f(x_0) + \varepsilon\|y - x_0\|.$$

Điều này, chứng tỏ $x^* \in \partial^F f(x_0)$, vậy $\partial^M f(x_0) \subseteq \partial^F f(x_0)$.

Cuối cùng chứng tỏ $\partial f(x_0) \subseteq \partial^F f(x_0)$. Lấy $x^* \in \partial f(x_0)$, vì f là hàm lồi xấp xỉ tại x_0 nên với $y \in B(x_0, \delta)$ cố định và $t \in (0,1)$ ta có

$$\frac{f(x_0 + t(y - x_0)) - f(x_0)}{t} \le f(y) - f(x_0) + \varepsilon(1-t)\|y - x_0\|.$$

Cho $t \downarrow 0$ ta được $f'(x_0, y - x_0) \le f(y) - f(x_0) + \varepsilon\|y - x_0\|$.

Suy ra $x^* \in \partial^F f(x_0)$. Vậy $\partial f(x_0) = \partial^F f(x_0)$.

Ta chứng minh (ii). Theo (i), ta có $\partial f(x_0) = \partial^F f(x_0) \subseteq \partial f^A(x_0)$.

Giả sử f là hàm Lipschizt xung quanh tại x_0, khi đó tồn tại $K > 0,\ \delta > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| \le K\|x - y\|,\ \forall x,\ y \in B(x_0, \delta).$$

Lấy $x^* \in \partial^A f(x_0)$ tùy ý, $v \in X,\ \varepsilon,\ \gamma > 0$ và $L \in \mathbb{F}(X) : v \in L$. Đặt

$$\mathrm{W} := \left\{ x^* \in X : |\langle x^*, v \rangle| \le \gamma \right\},\ V := B(x_0, \eta),\ \eta > 0.$$

Do định nghĩa, tồn tại $y \in V,\ y^* \in \partial_\varepsilon^- f_{y+L}(y)$ sao cho $|\langle y^* - x^*, v \rangle| \le \gamma$.

Vì f là *hàm lồi xấp xỉ* tại x_0 nên tồn tại $\delta > 0,\ \delta < \delta_0$ sao cho f là hàm $\varepsilon -$lồi.

Với mọi $\eta > 0,\ t > 0$ đủ nhỏ để $\eta + t\|v\| < \delta$ và do $y \in B(x_0,\ \eta)$ nên ta có $y + tv \in B(x_0,\ \delta)$. Với mọi $s \in (0,\ 1)$ ta có

$$y+sv=sv+\frac{ys}{t}+y-\frac{ys}{t}=\left(t+tv\right)\frac{s}{t}+\left(t-s\right)\frac{y}{t}.$$

Do đó,

$$f\left(y+sv\right)\leq\frac{s}{t}f\left(y+sv\right)+\frac{t-s}{t}f\left(y\right)+\frac{\varepsilon s\left(t-s\right)}{t^2}t\left\|v\right\|$$

$$\Leftrightarrow\frac{f\left(y+sv\right)-f\left(y\right)}{s}\leq\frac{f\left(y+tv\right)-f\left(y\right)}{t}+\varepsilon\left(1-\frac{s}{t}\right)\left\|v\right\|.$$

Cho $s\to 0$ ta được

$$\left\langle y^*,v\right\rangle\leq\frac{f\left(y+tv\right)-f\left(y\right)}{t}+2\varepsilon\left\|v\right\|.$$

Mặt khác, vì f là hàm Lipschitz với hằng số K và $y\in B\left(x_0,\ \eta\right)$ ta có

$$f\left(y+tv\right)-f\left(y\right)\leq f\left(x_0+tv\right)-f\left(y\right)+2K\eta.$$

Do đó, ta được

$$\left\langle x^*,v\right\rangle\leq\frac{f\left(x_0+tv\right)-f\left(x_0\right)}{t}+2\varepsilon\left\|v\right\|+\frac{2K\eta}{t}+\gamma.$$

Cho $\eta\to 0,\ \gamma\to 0$ ta có

$$\left\langle x^*,v\right\rangle\leq\frac{f\left(x_0+tv\right)-f\left(x_0\right)}{t}+2\varepsilon\left\|v\right\|.$$

Cho $t\to 0,\ \varepsilon\to 0$ ta có

$$\left\langle x^*,\ v\right\rangle\leq f'\left(x_0,\ v\right).$$

Điều này chứng tỏ $x^*\in\partial f\left(x_0\right)$.

4. Kết luận

Bài báo đã thực hiện được các vấn đề sau:

Chứng minh chi tiết các kết quả, định lý 2.3.6, định lý 2.3.7, định lý 2.3.8.

Định lý 2.3.6, thiết lập tính Lipschitz của hàm lồi xấp xỉ.

Định lý 2.3.7 và định lý 2.3.8 là một số tính chất đặc trưng của hàm lồi xấp xỉ ❑

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Aubin, J. P., Frankowska, H. (1990) *Set-valued Analysis*, Springer, Berlin.

Huynh Van Ngai, Nguyen Huu Tron, and Michel Théra. (2000). *Approximate convex function.,* Math. Prog.

Huynh Van Ngai, Nguyen Huu Tron, and Michel Théra. (2011). *Metric regularity of the sum of multifunctions and applications, Math. Prog.*

Huynh Van Ngai, Nguyen Huu Tron, and Michel Théra. (2013). *Implicit Multifunction Theorems In Complete Metric Spaces,Math. Prog.*

Hoang Tuy. (1997). *Convex Analyis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers.

Nguyễn Đông Yên. (2007). *Giải tích đa trị*, NXB Khoa học Tự nhiên và Công nghệ.